

7

Tablas de contingencia y medidas de asociación

PRUEBA *Ji*-CUADRADO EN TABLAS DE CONTINGENCIA

Supongamos que se desea analizar si el efecto de tres tratamientos dermatológicos para el acné, A, B y C, depende del tipo de presentación, siendo crema, comprimido, polvo y líquido los cuatro posibles tipos de cada uno de ellos. Para ello, se divide aleatoriamente un conjunto de 300 pacientes con acné en 12 grupos con 25 pacientes cada uno, y a cada grupo se le aplica un tratamiento con una presentación. Después de un período de observación, se mide el número de resultados favorables en cada grupo (de entre las 25 observaciones en un grupo, el número de ocasiones en las que ha remitido el acné). Para determinar si la probabilidad de obtener un resultado favorable con un tratamiento es independiente de cuál sea la presentación, se aplicarán la prueba *Ji*-cuadrado de Pearson y la razón de verosimilitud *Ji*-cuadrado.

Prueba *Ji*-cuadrado de Pearson

La prueba *Ji*-cuadrado se aplica al caso de que se disponga de una tabla de contingencia con r filas y c columnas correspondiente a la observación de muestras de dos variables X e Y , con r y c categorías respectivamente. Se utiliza para contrastar la hipótesis nula:

$$H_0: \text{Las variables } X \text{ e } Y \text{ son independientes}$$

Si el p -valor asociado al estadístico de contraste es menor que α , se rechazará la hipótesis nula al nivel de significación α .

Si denominamos *TRATAMIE* y *PRESENTA* a las variables «Tratamiento dermatológico» y «Presentación del tratamiento» respectivamente, los valores que presenta

la primera en el conjunto de pacientes observados son: A, B y C, codificados numéricamente como 1, 2 y 3. Los valores que presenta la segunda son: Crema, Comprimido, Polvo y Líquido, codificados numéricamente como 1, 2, 3 y 4. La hipótesis nula que se desea contrastar es que las variables *TRATAMIE* y *PRESENTA* son independientes.

La prueba *Ji-cuadrado* para tablas de contingencia sobre las variables *TRATAMIE* y *PRESENTA* se solicita en el Cuadro de diálogo 7.1. Los resultados se disponen en la Figura 7.1. Obsérvese que, de un total de 100 pacientes sometidos a cada uno de los tres tratamientos, el número de resultados favorables ha sido muy parecido («Row Total» = 65, 63 y 62). Luego la proporción global de resultados favorables con cada uno de los tres tratamientos es muy parecida, lo que no implica que, para una determinada presentación, también lo sea. Si la eficacia del tratamiento fuera independiente de la presentación, entonces, cualquiera que fuera la presentación, la proporción de resultados favorables con un tratamiento sería parecida a la proporción global. Si, por el contrario, para una determinada presentación, la proporción de resultados favorables con un tratamiento fuera significativamente mayor o menor que la proporción global, la eficacia del tratamiento dependería de la presentación. Por ejemplo, en el caso del tratamiento C, la proporción global de resultados favorables es igual a $62/190 = 0,33$; sin embargo, si el tipo de presentación es Crema, será igual a $23/46 = 0,5$, mientras que si el tipo de presentación es Polvo, será igual a $6/45 = 0,13$. Luego, dependiendo del tipo de presentación, el tratamiento puede ser más o menos eficaz.

Si las variables *TRATAMIE* y *PRESENTA* fueran independientes, la probabilidad de un resultado favorable con un tratamiento *i* con presentación *j* sería igual a la probabilidad de un resultado favorable con el tratamiento *i* por la probabilidad de un resultado favorable con la presentación *j*. Luego, bajo la hipótesis de indepen-

ESTADISTICA → RESUMIR → TABLAS DE CONTINGENCIA
En el Cuadro de diálogo

FILA(S): TRATAMIE
COLUMNA(S): PRESENTA
CELIDAS En el Cuadro de diálogo
FRECUENCIAS: OBSERVADAS, ESPERADAS
RESIDUOS: NO TIPIFICADOS, TIPIFICADOS
ESTADISTICOS En el Cuadro de diálogo
CHI CUADRADO
CONTINUAR
ACEPTAR

CUADRO DE DIALOGO 7.1. Prueba *Ji-cuadrado* para tablas de contingencia y razón de verosimilitud *Ji-cuadrado* para las variables *TRATAMIE* y *PRESENTA*.

		PRESENTA				
Count		Crema	Comprimido	Polvo	Líquido	Row Total
TRATAMIE	Exp Val Residual Std Res	1	2	3	4	
A	1	17	4	19	25	65
		15.7	16.1	15.4	17.8	34.2%
		1.3	-12.1	3.6	7.2	
		.3	-3.0	.9	1.7	
B	2	6	22	20	15	63
		15.3	15.6	14.9	17.2	33.2%
		-9.3	6.4	5.1	-2.2	
		-2.4	1.6	1.3	-5	
C	3	23	21	6	12	62
		15.0	15.3	14.7	17.0	32.6%
		8.0	5.7	-8.7	-5.0	
		2.1	1.4	-2.3	-1.2	
Column Total		46	47	45	52	190
		24.2%	24.7%	23.7%	27.4%	100.0%

Chi-Square	Value	DF	Significance
Pearson	36.15107	6	.00000
Likelihood Ratio	41.79271	6	.00000
Minimum Expected Frequency	14.684		

FIGURA 7.1. Prueba Ji-cuadrado para tablas de contingencia y razón de verosimilitud Ji-cuadrado para las variables TRATAMIE y PRESENTA.

dencia, el número de resultados favorables en la celda (i,j) de la tabla de contingencia sería igual al número de resultados favorables con el tratamiento i por el número de resultados favorables con la presentación j, partido por el total de observaciones. Por ejemplo, en el caso del tratamiento C presentado en Crema, el número observado de resultados favorables es igual a 23 («Count»). Bajo la hipótesis de independencia, el número esperado («Exp Val») es igual al producto de los marginales en la fila y en la columna correspondientes («Row total = 62» y «Column Total = 46») partido por el total de resultados favorables, N = 190:

$$\frac{62 \times 46}{190} = 15,01$$

El estadístico *Ji*-cuadrado de Pearson se construye a partir de las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas bajo la hipótesis de independencia. El *p*-valor asociado («Significance = 0,00000») es menor que 0,05, luego, al nivel de significación 0,05, se rechazará la hipótesis nula. Dado que las diferencias entre lo observado en la muestra y lo esperado bajo la hipótesis nula son estadísticamente significativas, no se puede aceptar que la probabilidad de obtener un resultado favorable con un tratamiento es independiente de cuál sea la presentación.

Después de comprobar que las variables *TRATAMIE* y *PRESENTA* son dependientes, un aspecto interesante sería analizar en qué consiste la dependencia. Si, para un mismo tratamiento, la probabilidad de obtener un resultado favorable es distinta dependiendo de la presentación, en la fila correspondiente las frecuencias observadas estarán en unos casos por encima y en otros por debajo de la frecuencia esperada. Por ejemplo, en el caso del tratamiento C presentado en Crema, el número de resultados favorables observado es superior al que cabría esperar si las variables fueran independientes, siendo la diferencia entre ambos («Residual») igual a 8. Esta diferencia podría ser una medida del grado de relación entre las dos categorías de las variables. Sin embargo, presenta el inconveniente de que su valor es relativo: una misma diferencia, o residuo, puede ser pequeña o grande dependiendo de la frecuencia esperada en la celda. En consecuencia, para comparar la relación entre las distintas categorías, se utilizará el residuo tipificado («Std Res»). Si el residuo tipificado es grande en valor absoluto, las categorías correspondientes estarán relacionadas: en la celda correspondiente la frecuencia observada se concentrará en mayor o menor medida, dependiendo de si el residuo es positivo o negativo respectivamente, que la que cabría esperar si fueran independientes.

Analicemos, a partir de los residuos tipificados, en qué consiste la dependencia entre las dos variables. Observemos que en 9 de las 12 celdas los residuos tipificados son mayores que 1 en valor absoluto. Por ejemplo, en las celdas (1,4), (2,2), (2,3), (3,1) y (3,2) los residuos tipificados son positivos, lo que implica que, en el caso del tratamiento A líquido, del B en comprimido o en polvo y del C en crema o comprimido, la probabilidad de un resultado favorable es significativamente mayor que la que cabría esperar si las variables fueran independientes. Por el contrario, en las celdas (1,2), (2,1), (3,3) y (3,4), los residuos tipificados son negativos, lo que implica que, en el caso del tratamiento A en comprimido, del B en crema y del C en polvo o líquido, la probabilidad de un resultado favorable es significativamente menor que la que cabría esperar si las variables fueran independientes.

Razón de verosimilitud *Ji*-cuadrado

La razón de verosimilitud *Ji*-cuadrado es una alternativa al estadístico *Ji*-cuadrado de Pearson para contrastar la hipótesis de independencia entre las variables. Mientras que el estadístico *Ji*-cuadrado de Pearson se basa en las diferencias entre las frecuencias observadas y las esperadas, la razón de verosimilitud *Ji*-cuadrado se basa en el cociente entre ellas.

Siguiendo con nuestro ejemplo (Figura 7.1), el *p*-valor asociado a la razón de

verosimilitud Ji -cuadrado («Significance = 0,00000») también es menor que 0,05. En consecuencia, al nivel de significación 0,05, también se rechazará la hipótesis nula de independencia entre las variables *TRATAMIE* y *PRESENTA*.

En este ejemplo concreto los dos estadísticos llevan a una misma conclusión. Sin embargo, podría suceder que, para un mismo nivel de significación, el p -valor asociado a uno de ellos fuera menor que el nivel de significación, mientras que el p -valor asociado al otro fuera mayor. En dicho caso debería optarse por el más conservador (por el que presente menor p -valor).

CORRECCION DE YATES Y MEDIDAS DE ASOCIACION PARA DOS VARIABLES DICOTOMICAS

Supongamos que se desea analizar el efecto de dos tratamientos antibióticos para infecciones de orina, A y B. Para ello, se divide aleatoriamente un conjunto de pacientes con infección urinaria en dos grupos y a cada grupo se le aplica un tratamiento distinto. Después de un período de observación, se comprueba en cada caso si la infección ha desaparecido o no. Para determinar si los dos tratamientos son homogéneos respecto a la desaparición o no de la infección se aplicará la corrección de Yates y, posteriormente, supuesto que se rechace la homogeneidad, para medir el grado de dependencia entre la desaparición de la infección y el tratamiento antibiótico utilizado, se considerarán el coeficiente Phi y el Riesgo relativo.

Corrección de Yates y prueba de la probabilidad exacta de Fisher

En el caso de tablas 2×2 (las dos variables dicotómicas o dicotomizadas mediante un punto de corte), el p -valor asociado al estadístico Ji -cuadrado de Pearson puede ser poco preciso. En el caso de que el número total de observaciones en la muestra sea grande, una alternativa al estadístico Ji -cuadrado de Pearson, que incorpora una corrección por continuidad y, por tanto, un p -valor más preciso, es la corrección de Yates. Si el tamaño muestral es pequeño, mediante la prueba de la probabilidad exacta de Fisher, se puede calcular la probabilidad exacta de observar un conjunto particular de frecuencias en una tabla 2×2 . El propio programa optará por una u otra de las pruebas en función del tamaño muestral y de las frecuencias esperadas en las celdas.

Si denominamos *TRATAMIE* y *DESAPARI* a las variables «Tratamiento antibiótico» y «Desaparición de la infección» respectivamente, los valores que presenta la primera en el conjunto de pacientes observados son: A y B. Los valores que presenta la segunda son: Sí y No. En ambos casos los dos valores están codificados numéricamente como 1 y 2. La hipótesis nula que se desea contrastar es que las variables *TRATAMIE* y *DESAPARI* son independientes o, lo que es equivalente, que los dos tratamientos son homogéneos respecto a la desaparición o no de la

infección. Es decir, no se trata de comprobar si cada uno de ellos es eficaz, sino de comprobar que la eficacia de los dos es la misma.

La corrección de Yates, el coeficiente Phi y el Riesgo relativo sobre las variables *TRATAMIE* y *DESAPARI* se solicitan en el Cuadro de diálogo 7.2. Los resultados se disponen en la Figura 7.2. En concreto, la corrección de Yates («Continuity Correction»), al tratarse simplemente de una corrección por continuidad, se interpreta exactamente igual que el estadístico *Ji-cuadrado* de Pearson. El *p*-valor asociado («Significance = 0,00475») es menor que 0,05, luego, al nivel de significación 0,05, se rechaza la hipótesis nula. Dado que las diferencias entre lo observado en la muestra y lo esperado bajo la hipótesis nula son estadísticamente significativas, se puede aceptar que, dependiendo del tratamiento aplicado, la probabilidad de que la infección desaparezca es distinta. Para medir el grado y en qué consiste la dependencia entre las variables utilizaremos, en lo que sigue, dos medidas de asociación adecuadas para el caso de que las variables objeto de análisis sean dicotómicas: el coeficiente Phi y el Riesgo relativo.

El coeficiente Phi

El coeficiente Phi es una medida del grado de asociación entre dos variables dicotómicas basada en el estadístico *Ji-cuadrado*, que toma valores entre 0 y 1. Valores próximos a 0 indicarán no asociación entre las variables y valores próximos a 1, fuerte asociación.

Siguiendo con nuestro ejemplo (Figura 7.2), el valor del coeficiente Phi es igual a 0,54470. Luego la relación entre las variables *TRATAMIE* y *DESAPARI* no es demasiado fuerte, aunque tampoco es débil.

ESTADISTICA → RESUMIR → TABLAS DE CONTINGENCIA
En el Cuadro de diálogo

FILA(S): TRATAMIE
COLUMNA(S): DESAPARI
ESTADISTICOS En el Cuadro de diálogo
CHI CUADRADO
DATOS NOMINALES: PHI Y V DE CRAMER
RIESGO
CONTINUAR

ACEPTAR

CUADRO DE DIALOGO 7.2. Corrección de Yates, coeficiente Phi y Riesgo relativo para las variables *TRATAMIE* y *DESAPARI*.

TRATAMIE		DESAPARI		Row Total
Count		Sí	No	
		1	2	
TRATAMIE A	1	15	2	17 50.0
TRATAMIE B	2	6	11	17 50.0
Column Total		21 61.8	13 38.2	34 100.0

Chi-Square	Value	DF	Significance
Pearson	10,08791	1	,00149
Continuity Correction	7,97070	1	,00475
Likelihood Ratio	10,84429	1	,00099

Statistic	Value	ASE1	Val/ASE0	Approximate Significance
Phi	,54470			,00149 *1

*1 Pearson chi-square probability

Statistic	Value	95% Confidence Bounds	
Relative Risk Estimate (TRATAMIE 1 / TRATAMIE 2) :			
case control	13,75000	2,32015	81,48729
cohort (DESAPARI 1 Risk)	2,50000	1,28358	4,86919
cohort (DESAPARI 2 Risk)	,18182	,04721	,70019

FIGURA 7.2. Corrección de Yates, coeficiente Phi y Riesgo relativo para las variables TRATAMIE y DESAPARI.

Riesgo relativo

El Riesgo relativo es una medida del grado de asociación entre dos variables dicotómicas, que compara el producto de las frecuencias en la diagonal principal de la tabla con el producto de las frecuencias en la diagonal opuesta mediante el cociente entre ambos. En consecuencia, toma valores positivos y, si las variables son independientes, su valor será próximo a 1.

Siguiendo con nuestro ejemplo (Figura 7.2), el Riesgo relativo es igual a 13,75 («Relative Risk Estimate (*TRATAMIE 1/TRATAMIE 2*): case control»). Dicho valor es el resultado del cociente:

$$\frac{15 \times 11}{6 \times 2} = \frac{15/2}{6/11} = \frac{7,5}{0,54}$$

Es decir, por cada paciente para el que la infección no ha desaparecido hay 7,5 pacientes para los que sí ha desaparecido con el tratamiento A y 0,54 con el B. En otras palabras, por cada paciente para el que la infección no ha desaparecido, el número de pacientes para los que sí ha desaparecido es 13,75 veces superior con el tratamiento A.

Supongamos que, entre los grupos establecidos por los valores de la variable *TRATAMIE*, pudiéramos distinguir un grupo de control (formado por pacientes a los que se ha aplicado uno de los dos tratamientos) y un grupo experimental (formado por los pacientes a los que se ha aplicado el otro). En este caso, el programa nos ofrece la posibilidad de comparar los dos grupos en función de los valores de la variable *DESAPARI*. Si, en particular, consideramos como grupo experimental el identificado con el tratamiento A, el Riesgo relativo con respecto a la desaparición de la infección es igual a 2,5 («Relative Risk Estimate (*TRATAMIE 1/TRATAMIE 2*): cohort (*DESAPARI 1 Risk*)»), mientras que, con respecto a la no desaparición, es igual a 0,18182 («Relative Risk Estimate (*TRATAMIE 1/TRATAMIE 2*): cohort (*DESAPARI 2 Risk*)»). Dichos valores son el resultado de los cocientes:

$$\frac{15/17}{6/17} = \frac{0,88}{0,35} = 2,5 \quad \text{y} \quad \frac{2/17}{11/17} = \frac{0,12}{0,65} = 0,18$$

Es decir, con el tratamiento A la proporción de casos en los que la infección ha desaparecido es igual a 0,88, mientras que con el B es igual a 0,35. Luego, en los casos en que ha desaparecido la infección, la proporción de casos que ha seguido el tratamiento A es 2,5 veces superior a la proporción de casos que ha seguido el B. Por otro lado, en los casos en que no ha desaparecido, dicha proporción es igual a 0,18. En otras palabras, el tratamiento A ha sido más eficaz que el B.

MEDIDAS DE ASOCIACION PARA DOS VARIABLES EN ESCALA NOMINAL

Supongamos que se desea analizar el efecto de tres tratamientos antibióticos para infecciones de orina, A, B y C. Para ello, se divide aleatoriamente un conjunto de pacientes con infección urinaria en tres grupos, aplicando a cada grupo un tratamiento distinto. Después de un período de observación, se comprueban en cada caso los síntomas del paciente. Para medir el grado de dependencia de la sintomatología respecto del tratamiento antibiótico se considerarán el coeficiente de Con-

tingencia, la V de Cramer, las Lambdas simétrica y asimétricas y los coeficientes de Incertidumbre simétrico y asimétricos.

El coeficiente de Contingencia y la V de Cramer

El coeficiente Phi únicamente toma valores comprendidos entre 0 y 1 en el caso de tablas 2×2 . En el caso de tablas mayores puede alcanzar valores superiores a 1. El coeficiente de Contingencia es una extensión del coeficiente Phi al caso de que al menos una de las dos variables presente más de dos categorías. Toma valores entre 0 y C_{max} donde, si r y c son el número de categorías de cada una de las dos variables:

$$C_{max} = \sqrt{\frac{\min(r-1, c-1)}{1 + \min(r-1, c-1)}}$$

Valores del coeficiente de Contingencia próximos a 0 indican no asociación entre las variables y valores próximos a C_{max} (obsérvese que C_{max} será siempre inferior a 1), fuerte asociación.

Otra extensión del coeficiente Phi al caso de variables con más de dos categorías es la V de Cramer que, a diferencia del coeficiente de Contingencia, toma valores entre 0 y 1, no dependiendo de una cota superior. Sin embargo, la V de Cramer tiende a subestimar el grado de asociación entre las variables. Valores de V próximos a 0 indican no asociación entre las variables y valores próximos a 1, fuerte asociación.

Si denominamos *TRATAMIE* y *SINTOMAT* a las variables «Tratamiento antibiótico» y «Sintomatología» respectivamente, los valores que presenta la primera en el conjunto de pacientes observados son: A, B y C. Los valores que presenta la segunda son: «Sin síntomas», «Mejoría, aunque persisten síntomas» y «No mejoría». En ambos casos los tres valores están codificados numéricamente como 1, 2 y 3. El objetivo que se persigue es medir el grado de asociación entre los valores de las variables *TRATAMIE* y *SINTOMAT*.

El coeficiente de Contingencia, la V de Cramer, las Lambdas simétrica y asimétricas y los coeficientes de Incertidumbre simétrico y asimétricos sobre las variables *TRATAMIE* y *SINTOMAT* se solicitan en el Cuadro de diálogo 7.3. Los resultados se disponen en la Figura 7.3. En concreto, los valores del coeficiente de Contingencia («Contingency Coefficient») y de la V de Cramer («Cramer's V») son iguales a 0,40860 y 0,31655 respectivamente. Recordemos que, en este caso particular de una tabla 3×3 , la cota superior que puede alcanzar el coeficiente de Contingencia es:

$$C_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}} = 0,8165$$

```

ESTADISTICA → RESUMIR → TABLAS DE CONTINGENCIA
En el Cuadro de diálogo
FILA(S): TRATAMIE
COLUMNA(S): SINTOMAT
ESTADÍSTICOS En el Cuadro de diálogo
DATOS NOMINALES: COEFICIENTE DE CONTINGENCIA, PHI Y V DE
CRAMER, LAMBDA, COEFICIENTE DE INCERTIDUMBRE
CONTINUAR
ACEPTAR
    
```

CUADRO DE DIALOGO 7.3. Coeficientes de Contingencia, V de Cramer, Lambda, y Coeficiente de Incertidumbre para las variables *TRATAMIE* y *SINTOMAT*.

TRATAMIE Tratamiento antibiótico by SINTOMAT Sintomatología					
Count	SINTOMAT			Row Total	
	Sin Sintomas	Mejoría aunque	No mejoría		
	1	2	3		
A	1	8	18	7	33
B	2	9	6	19	34
C	3	17	9	7	33
Column Total	34	33	33		100
	34.0	33.0	33.0		100.0

Statistic	Value	ASE1	Val/ASE0	Approximate Significance
Cramer's V	,31655			,00049 *1
Contingency Coefficient	,40860			,00049 *1
Lambda :				
symmetric	,30303	,08322	3,35673	
with TRATAMIE dependent	,30303	,08944	2,94884	
with SINTOMAT dependent	,30303	,09295	2,82843	
Uncertainty Coefficient :				
symmetric	,08648	,03941	2,19445	,00079 *3
with TRATAMIE dependent	,08648	,03941	2,19445	,00079 *3
with SINTOMAT dependent	,08648	,03940	2,19445	,00079 *3

*1 Pearson chi-square probability
 *2 Based on chi-square approximation
 *3 Likelihood ratio chi-square probability

FIGURA 7.3. Coeficientes de Contingencia, V de Cramer, Lambda, y Coeficiente de Incertidumbre para las variables *TRATAMIE* y *SINTOMAT*.

Teniendo en cuenta esta observación, el valor obtenido para el coeficiente de Contingencia estaría en medio del intervalo delimitado por los límites inferior y superior de su rango de variación. Luego la relación entre las variables *TRATAMIE* y *SINTOMAT* no es demasiado fuerte, aunque tampoco es débil. Sin embargo, el valor de la *V* de Cramer estaría en el primer tercio del intervalo delimitado por los límites inferior y superior de su rango de variación, confirmando así, al compararlo con el valor del coeficiente de Contingencia, la observación relativa a que se trata de una medida que tiende a subestimar el grado de asociación.

Las Lambdas simétrica y asimétricas

Comparan el error cometido en la predicción de los valores de una de las variables a partir de los valores de la otra con el error cometido en la predicción cuando únicamente se considera la información de la propia variable, tomando valores entre 0 y 1. La versión asimétrica se interpreta como la proporción en que se reduce el error al predecir los valores de una de las variables a partir de los de la otra, mientras que la versión simétrica se interpreta como la proporción en que se reduce el error al predecir los valores de cualquiera de las dos variables mediante la tabla de contingencia. El valor de la versión simétrica estará comprendido entre el de las correspondientes versiones asimétricas. La expresión de estas medidas depende de los valores modales, por lo que puede suceder que tomen valor 0 en situaciones en las que la independencia no sea total.

Siguiendo con nuestro ejemplo (Figura 7.3), el valor de Lambda considerando a *TRATAMIE* como variable dependiente («Lambda: with *TRATAMIE* dependent») es igual al de Lambda considerando a *SINTOMAT* como dependiente («Lambda: with *SINTOMAT* dependent») y, por tanto, igual al de la versión simétrica («Lambda: symmetric»), siendo los tres valores iguales a 0,30303. Dado que nuestro objetivo es medir el grado en que depende la sintomatología respecto del tratamiento antibiótico aplicado, nos centraremos en la interpretación del valor de Lambda cuando se considera a *SINTOMAT* como variable dependiente. Ignorando la información proporcionada por la variable *TRATAMIE*, la predicción de un valor de *SINTOMAT* sería la categoría «Sin síntomas», que es la que presenta mayor frecuencia o, lo que es lo mismo, el valor modal. Sin embargo, si consideráramos la información proporcionada por *TRATAMIE*, y el tratamiento aplicado fuera el B, la predicción del valor de *SINTOMAT* sería la categoría «No mejoría», que corresponde al valor modal en el grupo de pacientes que ha seguido el tratamiento B. Luego, al considerar la información de la tabla, la predicción sería distinta. En este sentido, cuando se considera a la variable *SINTOMAT* como dependiente, la Lambda mide la proporción en que se reduce el error en la predicción de sus valores al considerar la información de *TRATAMIE*. En nuestro caso particular, dicha proporción es aproximadamente igual a un tercio.

no todos

Los coeficientes de Incertidumbre simétrico y asimétricos

Miden la proporción de incertidumbre reducida en la predicción de los valores de una de las variables a partir de los valores de la otra, frente a la predicción cuando únicamente se considera la información de la propia variable, tomando valores entre 0 y 1. La versión asimétrica se interpreta como la proporción de incertidumbre reducida al predecir los valores de una variable a partir de los de la otra, mientras que la versión simétrica se interpreta como la proporción de incertidumbre reducida al predecir los valores de cualquiera de las dos variables mediante la tabla de contingencia. El valor de la versión simétrica estará comprendido entre el de las correspondientes versiones asimétricas. La expresión de estos coeficientes depende de toda la distribución, y no sólo de los valores modales, tomando valor cero únicamente en los casos en los que la independencia es total. En este sentido, el coeficiente de Incertidumbre es mejor que Lambda; sin embargo, es más difícil de interpretar.

Si siguiendo con nuestro ejemplo (Figura 7.3), el valor del coeficiente de Incertidumbre considerando a *TRATAMIE* como variable dependiente («Uncertainty Coefficient: with *TRATAMIE* dependent») es igual al del coeficiente de Incertidumbre considerando a *SINTOMAT* como dependiente («Uncertainty Coefficient: with *SINTOMAT* dependent») y, por tanto, igual al de la versión simétrica («Uncertainty Coefficient: symmetric»), siendo los tres valores iguales a 0,08648. Al igual que en el apartado anterior, dado que nuestro objetivo es medir el grado en que depende la sintomatología respecto del tratamiento antibiótico aplicado, nos centraremos en la interpretación del valor del coeficiente de Incertidumbre cuando se considera a *SINTOMAT* como variable dependiente. En el apartado anterior se mencionó que, ignorando la información proporcionada por *TRATAMIE*, la predicción de un valor de *SINTOMAT* sería la categoría «Sin síntomas», dado que coincidía con el valor modal. Sin embargo, teniendo en cuenta que el número de pacientes que componen la muestra, $N = 100$, no es divisible entre tres, las frecuencias observadas no pueden ser más parecidas (34, 33 y 33, en las categorías *SINTOMAT* = 1, 2 y 3 respectivamente). En consecuencia, las probabilidades de obtener cada uno de los tres resultados tampoco pueden serlo. Bajo este punto de vista, el considerar como predicción el valor modal sería poco adecuado. El coeficiente de Incertidumbre, a diferencia de Lambda, considera toda la distribución a lo largo de las celdas de la tabla, y no sólo los valores modales. En este sentido, el coeficiente de Incertidumbre se puede interpretar como la proporción en que se reduce la incertidumbre en la predicción de los valores de una variable al considerar la información de la otra. En nuestro caso particular, la proporción de incertidumbre reducida al predecir los valores de *SINTOMAT* a partir de la información de *TRATAMIE* es muy pequeña.

Este resultado, al compararlo con el del apartado anterior, no debe sorprender. Teniendo en cuenta que, en este ejemplo concreto, el error cometido al considerar la moda como predicción del valor de *SINTOMAT* sería grande, a poco que esté relacionada con *TRATAMIE* será fácil reducir dicho error al considerar la información de la tabla.

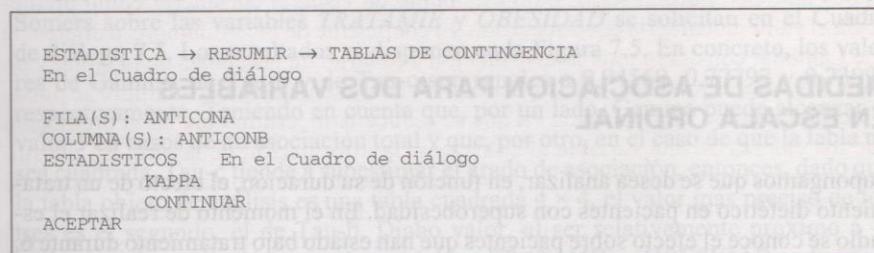
El coeficiente Kappa

Supongamos que se desea comparar los efectos secundarios de dos tratamientos anticonceptivos orales A y B. Para ello, se somete a un conjunto de mujeres al tratamiento A durante tres meses y se observan los efectos secundarios. Después de un período de tiempo en el que haya remitido el efecto del primer tratamiento, se somete a cada mujer al tratamiento B durante otro tres meses. Para comprobar si los efectos secundarios con uno u otro tratamiento son los mismos se aplicará el índice Kappa.

Kappa es una medida apropiada cuando se comparan los valores de dos variables en escala nominal, tales que sus posibles valores son los mismos. En consecuencia, la tabla de contingencia establecida por el cruce de los valores de las dos variables deberá ser cuadrada. Mide el grado de acuerdo entre los valores de las dos variables, tomando valores en el intervalo $[-1,1]$. Valores de Kappa próximos a 1 indicarán total acuerdo; valores próximos a -1 , total desacuerdo, y valores próximos a 0, independencia, en el sentido indicado, entre los dos aspectos evaluados.

Si denominamos *ANTICONA* y *ANTICONB* a las variables «Efectos secundarios del tratamiento anticonceptivo A» y «Efectos secundarios del tratamiento anticonceptivo B» respectivamente, los valores que presentan ambas variables en el conjunto de mujeres observadas son: No hay, Leves, Moderados y Severos, codificados numéricamente como 1, 2, 3 y 4. El objetivo que se persigue es medir el grado de coincidencia entre los valores de las variables *ANTICONA* y *ANTICONB*. Es decir, no se trata de determinar si los dos tratamientos producen los distintos grados de severidad de los efectos secundarios en la misma proporción, sino de comprobar si ambos producen efectos secundarios de igual grado de severidad en cada mujer.

El índice Kappa sobre las variables *ANTICONA* y *ANTICONB* se solicita en el Cuadro de diálogo 7.4. Los resultados se disponen en la Figura 7.4. El valor de Kappa, igual a 0,80608, indica que existe un alto grado de acuerdo entre los valores



CUADRO DE DIALOGO 7.4. Coeficiente Kappa para las variables *ANTICONA* y *ANTICONB*.

ANTICONA Efectos secundarios con anticonceptivo A
by ANTICONB Efectos secundarios con anticonceptivo B

Count	ANTICONB				Row Total
	No hay	Leves	Moderados	Severos	
1	80	3			83 53.2
2	1	35	8		44 28.2
3		2	14	4	20 12.8
4			1	8	9 5.8
Column Total	81 51.9	40 25.6	23 14.7	12 7.7	156 100.0

Statistic	Value	ASE1	Val/ASE0	Approximate Significance
Kappa	,80608	,03957	15,11321	

FIGURA 7.4. Coeficiente Kappa para las variables ANTICONA y ANTICONB.

de las dos variables. Efectivamente, en la tabla de contingencia la frecuencia observada se acumula en la diagonal principal, lo que indica que, en general, sobre cada mujer los efectos secundarios de los dos tratamientos se producen con el mismo grado de severidad.

MEDIDAS DE ASOCIACION PARA DOS VARIABLES EN ESCALA ORDINAL

Supongamos que se desea analizar, en función de su duración, el efecto de un tratamiento dietético en pacientes con superobesidad. En el momento de realizar el estudio se conoce el efecto sobre pacientes que han estado bajo tratamiento durante 6, 12, 18 y 24 meses (se supone que cada paciente se somete a revisión cada 6 meses). Para analizar hasta qué punto el efecto del tratamiento dietético depende de su duración, se considerarán las medidas de asociación para escala ordinal Gamma, Tau-b de Kendall, Tau-c de Kendall y D de Somers.

Gamma, Tau-b de Kendall y Tau-c de Kendall

Gamma es una medida del grado y tipo de asociación entre dos variables cualitativas en escala ordinal, que toma valores en el intervalo $[-1,1]$. Valores próximos a 1 indican fuerte asociación positiva: a medida que aumentan los valores de una variable, aumentan los de la otra; valores próximos a -1 indican fuerte asociación negativa: a medida que aumentan los valores de una variable, disminuyen los de la otra, y valores próximos a 0 indican no asociación positiva ni negativa, lo que no significa que no pueda existir otro tipo de asociación. Aunque su valor es sencillo de interpretar, Gamma presenta el inconveniente de que puede alcanzar valores 1 o -1 en situaciones en las que la asociación no es total.

La medida Tau-b de Kendall es una extensión de la Gamma, en el sentido de que, tanto la situación bajo la que puede ser aplicada como su interpretación, es la misma. Pero, a diferencia de Gamma, su expresión únicamente alcanza valor 1 o -1 en situaciones de total asociación (positiva o negativa). Sin embargo, presenta el inconveniente de que dichos valores sólo pueden ser alcanzados cuando las dos variables presenten el mismo número de categorías o, lo que es equivalente, cuando la tabla de contingencia sea cuadrada.

La medida Tau-c de Kendall es una corrección de la Tau-b para el caso de variables con distinto número de categorías. Frente a Tau-b, presenta la ventaja de poder alcanzar los valores 1 o -1 cuando el número de categorías de las dos variables es distinto. Sin embargo, tiende a subestimar el verdadero grado de asociación entre las variables.

Si denominamos *TRATAMIE* y *OBESIDAD* a las variables «Tiempo desde que comenzó el tratamiento» y «Obesidad: clasificación BMI» respectivamente, los valores que presenta la primera en el conjunto de pacientes observados son: 6, 12, 18 y 24 meses. Los valores que presenta la segunda son: «Obesidad Mórbida o superobesidad ($>40 \text{ Kg/m}^2$)», «Obesidad Grave ($30-40 \text{ Kg/m}^2$)», «Obesidad Leve ($25-30 \text{ Kg/m}^2$)» y «Normal ($20-25 \text{ Kg/m}^2$)». En ambos casos los cuatro valores están codificados numéricamente como 1, 2, 3 y 4. El objetivo que se persigue es medir el grado de asociación entre los valores de las variables *TRATAMIE* y *OBESIDAD*.

Las medidas de asociación Gamma, Tau-b de Kendall, Tau-c de Kendall y D de Somers sobre las variables *TRATAMIE* y *OBESIDAD* se solicitan en el Cuadro de diálogo 7.5. Los resultados se disponen en la Figura 7.5. En concreto, los valores de Gamma, de Tau-b y de Tau-c son iguales a 0,94569, 0,77797 y 0,73098 respectivamente. Teniendo en cuenta que, por un lado, Gamma puede alcanzar el valor 1 en casos de no asociación total y que, por otro, en el caso de que la tabla no sea cuadrada, Tau-c tiende a subestimar el grado de asociación, entonces, dado que la tabla objeto de análisis es una tabla cuadrada 4×4 , el valor más preciso de los tres es el segundo, el de Tau-b. Dicho valor, al ser relativamente próximo a 1, indica que la asociación entre las variables *TRATAMIE* y *OBESIDAD* es fuerte y positiva: a mayor valor de una de las variables mayor valor de la otra. Efectivamente, en la tabla de contingencia la frecuencia observada se acumula en las celdas próximas a la diagonal principal, aunque es de resaltar que fundamentalmente se

ESTADISTICA → RESUMIR → TABLAS DE CONTINGENCIA
 En el Cuadro de diálogo
 FILA(S): TRATAMIE
 COLUMNA(S): OBESIDAD
 ESTADISTICOS En el Cuadro de diálogo
 DATOS ORDINALES: GAMMA, D DE SOMERS, TAU-B DE KENDALL, TAU-C
 DE KENDALL
 CONTINUAR
 ACEPTAR

CUADRO DE DIALOGO 7.5. Medidas de asociación Gamma, Tau-b y Tau-c de Kendall y D de Somers para las variables *TRATAMIE* y *OBESIDAD*.

TRATAMIE		OBESIDAD				Row
Count		Mórbida	Grave	Leve	Normal	Total
TRATAMIE		1	2	3	4	
6 Meses	1	5	31	7		43
						27.0
12 Meses	2		5	29	3	37
						23.3
18 Meses	3			8	32	40
						25.2
24 Meses	4			4	35	39
						24.5
	Column	5	36	48	70	159
	Total	3.1	22.6	30.2	44.0	100.0
Statistic	Value	ASE1	Val/ASE0	Approximate	Significance	
Kendall's Tau-b	,77797	,02761	24,97392			
Kendall's Tau-c	,73098	,02927	24,97392			
Gamma	,94569	,02058	24,97392			
Somers' D						
symmetric	,77651	,02756	24,97392			
with TRATAMIE dependent	,82717	,02857	24,97392			
with OBESIDAD dependent	,73171	,02989	24,97392			

FIGURA 7.5. Medidas de asociación Gamma, Tau-b y Tau-c de Kendall y D de Somers para las variables *TRATAMIE* y *OBESIDAD*.

acumula a su derecha. Por esta razón, los valores de estas tres medidas no son más próximos a 1 todavía. Como conclusión, cuanto mayor es la duración del tratamiento mayor es el efecto de la dieta. En concreto, al cabo de los 6 meses de iniciarse el tratamiento dietético, la superobesidad se reduce, en general, a obesidad grave; al cabo de 12 meses, a obesidad leve y, a partir de los 18, el peso es normal. De esta última observación se deduciría que, para alcanzar un peso normal, bastaría con seguir el tratamiento dietético durante 18 meses. Sin embargo, dado que las revisiones son semestrales, es de suponer que los pacientes sometidos al tratamiento durante 24 meses son aquellos que en la revisión anterior (al cabo de los 18 meses) todavía no habían alcanzado un peso normal.

D de Somers simétrica y asimétricas

La versión asimétrica de la D de Somers es una extensión de la Gamma que considera a una de las dos variables como dependiente. El valor de la versión simétrica estará comprendido entre el de las correspondientes versiones asimétricas. Tanto la versión simétrica como las asimétricas toman valores en el intervalo $[-1,1]$ y se interpretan como en los casos anteriores. Sin embargo, presentan el inconveniente de que pueden alcanzar los valores 1 o -1 en situaciones en las que la asociación no es total.

Siguiendo con nuestro ejemplo (Figura 7.5), el valor de la D de Somers para la versión simétrica («Somers' D: symmetric») es igual a 0,77651, mientras que los de las correspondientes versiones asimétricas son iguales a 0,82717, si se considera a *TRATAMIE* como variable dependiente («Somers' D: with *TRATAMIE* dependent»), y a 0,73171, si se considera como dependiente a *OBESIDAD* («Somers' D: with *OBESIDAD* dependent»). Dado que nuestro objetivo es medir el grado en que el efecto del tratamiento depende de su duración, el valor que nos interesaría es el último. Dicho valor, al ser relativamente alto, indica una fuerte dependencia positiva de los valores de *OBESIDAD* respecto de los valores de *TRATAMIE*.

MEDIDAS DE ASOCIACION EN ESCALA DE INTERVALO O DE RAZON

Supongamos que se sospecha que, en los pacientes con úlcera péptica que han seguido un tratamiento, el tiempo que tarda en reaparecer la sintomatología ulcerosa está relacionado con el tiempo que tarda el paciente en responder al tratamiento. Para comprobarlo, se somete a un conjunto de pacientes con úlcera péptica al tratamiento, y periódicamente (cada dos semanas) se comprueba si la sintomatología persiste o ha desaparecido. Una vez desaparecida, el paciente sigue sometido a revisiones periódicas para comprobar el tiempo que tarda en reaparecer. Teniendo en cuenta que, en la mayoría de los casos, la sintomatología ha desaparecido al cabo de las ocho semanas y que, por otro lado, ha reaparecido al cabo de los dieciséis meses, se descartarán todos aquellos pacientes en los que, pasadas ocho semanas, la sintomatología persiste o en los que, pasados dieciséis meses, todavía no ha

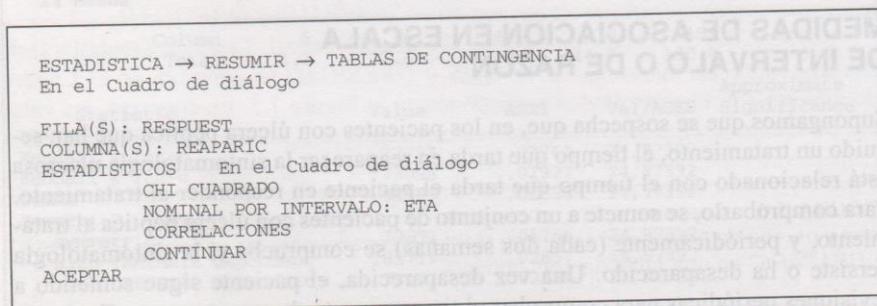
reaparecido. Para analizar la dependencia del tiempo de reaparición de los síntomas respecto del tiempo de respuesta al tratamiento se aplicarán el coeficiente Eta, los coeficientes de correlación de Pearson y Spearman y la medida de asociación lineal de Mantel-Haenszel.

El coeficiente Eta

El coeficiente Eta es una medida apropiada en el caso en que se analizan los valores de una variable *Y*, en escala de intervalo o de razón, en los distintos grupos o subpoblaciones establecidos por los valores de otra variable *X* cualitativa. Compara la variabilidad de la variable *Y* explicada por las diferencias entre grupos con la variabilidad total de la muestra, tomando valores entre 0 y 1. Valores de Eta próximos a 0 indicarán que el comportamiento de *Y* es independiente de los grupos: la media de *Y* es la misma en todos ellos. Valores de Eta próximos a 1 indicarán mucha dependencia: la media de *Y* es mayor o menor que la media global dependiendo del grupo. Su cuadrado puede interpretarse como la proporción de variabilidad de la variable dependiente, *Y*, explicada por los valores de la independiente, *X*.

Si denominamos *REAPARIC* y *RESPUEST* a las variables «Tiempo de reaparición de los síntomas» y «Tiempo de respuesta al tratamiento» respectivamente, los valores que presenta la primera en el conjunto de pacientes observados son: 4, 8, 12 y 16 meses. Los valores que presenta la segunda son: 2, 4, 6 y 8 semanas. El objetivo que se persigue es medir el grado de dependencia de la variable *REAPARIC* respecto de los distintos niveles de la variable *RESPUEST*.

El coeficiente Eta sobre los valores de la variable de *REAPARIC* en los distintos grupos establecidos por los valores de *RESPUEST* se solicita en el Cuadro de diálogo 7.6. Los resultados se disponen en la Figura 7.6. El valor de Eta considerando a *RESPUEST* como variable dependiente («Eta: with *RESPUEST* dependent») es



CUADRO DE DIALOGO 7.6. Coeficiente Eta, coeficientes de correlación de Pearson y de Spearman y prueba de Asociación Lineal de Mantel-Haenszel para las variables *RESPUEST* y *REAPARIC* en una tabla de contingencia.

RESPUEST Tiempo de respuesta al tratamiento
by REAPARIC Tiempo de reaparición de los síntomas

Count	REAPARIC				Row Total
	4 Meses	8 Meses	12 Meses	16 Meses	
RESPUEST					
2 Semanas		21	69	22	112 35.9
4 Semanas	6	67	27		100 32.1
6 Semanas	14	57	2		73 23.4
8 Semanas	17	10			27 8.7
Column Total	37	155	98	22	312 100.0
	11.9	49.7	31.4	7.1	

Chi-Square	Value	DF	Significance
Mantel-Haenszel test for linear association	152,58982	1	,00000

Statistic	Value	ASE1	Val/ASE0	Approximate Significance
Pearson's R	-,70046	,02514	-17,2803	,00000 *4
Spearman Correlation	-,72205	,02695	-18,3756	,00000 *4

*4 VAL/ASE0 is a t-value based on a normal approximation, as is the significance

Statistic	Value	ASE1	Val/ASE0	Approximate Significance
Eta :				
with RESPUEST dependent	,71540			
with REAPARIC dependent	,71433			

FIGURA 7.6. Coeficiente Eta, coeficientes de correlación de Pearson y de Spearman y prueba de Asociación Lineal de Mantel-Haenszel para las variables *RESPUEST* y *REAPARIC* en una tabla de contingencia.

igual a 0,71540; cuando se considera a *REAPARIC* como dependiente («Eta: with *REAPARIC* dependent»), es igual a 0,71433. Dado que nuestro objetivo es medir el grado en que el tiempo de reaparición de los síntomas depende del tiempo de res-

puesta al tratamiento, el valor que nos interesaría es el último. Dicho valor, relativamente próximo a 1, indica que el presentar un determinado valor en *REAPARIC* depende en gran medida de cuál haya sido el valor obtenido en *RESPUEST*. Efectivamente, en la tabla de contingencia, la frecuencia observada se acumula más o menos en torno a la diagonal opuesta a la principal, lo que indica que, cuanto mayor ha sido el tiempo de respuesta al tratamiento, menor ha sido el tiempo de reaparición de los síntomas.

Recordemos que el coeficiente Eta es una medida adecuada para el caso de que la variable dependiente esté medida en escala de intervalo o de razón, que permite comparar, teniendo en cuenta la dispersión, las medias de la variable dependiente en cada uno de los grupos establecidos por los valores de la independiente. En otras palabras, y en este caso concreto, la expresión del coeficiente Eta depende de las medias y de las desviaciones típicas de la variable *REAPARIC* en los grupos establecidos por los valores de la variable *RESPUEST*, y no de las frecuencias observadas en la tabla (aunque de alguna manera los dos tipos de información estén relacionados). Para clarificar el significado del coeficiente Eta, desarrollaremos un ejemplo análogo al actual en el que, a diferencia de éste, el número de posibles valores de la variable dependiente sea grande.

Hasta ahora la variable *REAPARIC* únicamente podía tomar valores iguales a 4, 8, 12 y 16 meses. Supongamos exactamente la misma situación del ejemplo anterior pero con la diferencia de que, en este caso, los valores de la variables *REAPARIC* son iguales 1, 2, ... y 16 meses.

El coeficiente Eta sobre los nuevos valores de *REAPARIC*, en los distintos grupos establecidos por los valores de la variable *RESPUEST*, se solicita en el Cuadro de diálogo 7.7. Los resultados se disponen en la Figura 7.7. En este caso, el valor de Eta (al final del bloque de resultados) es igual a 0,7605. Obsérvese que su cuadrado («Eta Squared = 0,5784») coincide con el cociente entre la suma de los cuadrados debida a las diferencias entre grupos («Sum of Squares: Between Groups =

<p>ESTADISTICA → COMPARAR MEDIAS → MEDIAS En el Cuadro de diálogo</p> <p>LISTA DEPENDIENTE: REAPARIC LISTA INDEPENDIENTE: RESPUEST OPCIONES En el Cuadro de diálogo ESTADÍSTICOS PARA PRIMERA CAPA: TABLA Y ETA DE ANOVA CONTINUAR</p> <p>ACEPTAR</p>

CUADRO DE DIALOGO 7.7. Coeficiente Eta para las variables *RESPUEST* y *REAPARIC*.

- - Description of Subpopulations - -

Summaries of REAPARIC Tiempo de reaparición de los síntomas
By levels of RESPUEST Tiempo de respuesta al tratamiento

Variable	Value	Label	Mean	Std Dev	Cases	
For Entire Population						
			7,8686	2,9550	312	
RESPUEST	2	Semanas	10,5893	2,3693	112	
RESPUEST	4	Semanas	7,3900	1,8851	100	
RESPUEST	6	Semanas	5,7671	1,3996	73	
RESPUEST	8	Semanas	4,0370	1,0554	27	
Total Cases = 312						
Value	Label	Mean	Std Dev	Sum of Sq	Cases	
2	Semanas	10,5893	2,3693	623,1071	112	
4	Semanas	7,3900	1,8851	351,7900	100	
6	Semanas	5,7671	1,3996	141,0411	73	
8	Semanas	4,0370	1,0554	28,9630	27	

Within Groups Total			7,8686	1,9280	1144,9012	312
Source	Sum of Squares	d.f.	Mean Square	F	Sig.	
Between Groups	1570,7110	3	523,5703	140,8503	,0000	
Within Groups	1144,9012	308	3,7172			
Eta = ,7605 Eta Squared = ,5784						

FIGURA 7.7. Coeficiente Eta para las variables *RESPUEST* y *REAPARIC*.

1570,7110») y la suma de cuadrados total (la suma del valor anterior más la suma de cuadrados debida a las diferencias dentro de los grupos: «Sum of Squares: Within Groups = 1144,192»). En otras palabras, el cuadrado del coeficiente Eta, como ya se mencionó en su descripción, se puede interpretar como la proporción de variabilidad de los valores de *REAPARIC* explicada por las diferencias entre grupos. Veamos qué significa esta afirmación.

La predicción de un valor de *REAPARIC*, ignorando el valor de *RESPUEST*, sería la media de sus valores («Mean = 7,8686»). Sin embargo, si consideramos a cuál de los grupos pertenece un paciente, la predicción del valor de *REAPARIC*

sería la media en el grupo correspondiente (iguales a 10,5893, 7,39, 5,7671 y 4,037, en los grupos 1, 2, 3 y 4 respectivamente). Si las medias en los cuatro grupos fueran muy parecidas entre sí, al predecir el valor de *REAPARIC* a partir de los valores de *RESPUEST* tendríamos la misma información que sin distinguir grupos. Sin embargo, si las medias de los cuatro grupos fueran muy distintas entre sí y, por otro lado, dentro de cada grupo el comportamiento fuera muy homogéneo, con valores poco dispersos y próximos a la media, al predecir el valor de *REAPARIC* a partir de las medias en los grupos ganaríamos información respecto a la predicción con la media sin distinguir grupos. En este sentido, el cuadrado del coeficiente Eta, que compara las distancias de las medias en los grupos a la media total con las distancias de cada observación a la media total, puede ser interpretado como la parte de variabilidad total atribuible a las diferencias entre grupos. Cuanto más se aproxime a 1 su valor, mejor será la predicción de los valores de *REAPARIC* a partir de la información de *RESPUEST*. En concreto, el tiempo esperado de reaparición de los síntomas, independientemente del tiempo de respuesta al tratamiento, sería de 8 meses aproximadamente. Si consideráramos el tiempo de respuesta al tratamiento, y dicho tiempo fuera de 2, 4, 6 u 8 semanas, el tiempo esperado de reaparición sería, aproximadamente, de 11, 7, 6 y 4 meses respectivamente.

Los coeficientes de correlación de Pearson y Spearman

El coeficiente de correlación de Pearson mide el grado de asociación lineal entre dos variables medidas en escala de intervalo o de razón, tomando valores entre -1 y 1 . Valores próximos a 1 indicarán fuerte asociación lineal positiva: a medida que aumentan los valores de una de las dos variables aumentan los de la otra; valores próximos a -1 indicarán fuerte asociación lineal negativa: a medida que aumentan los valores de una de las dos variables disminuyen los de la otra, y valores próximos a 0 indicarán no asociación lineal, lo que no significa que no pueda existir otro tipo de asociación. Su cuadrado puede interpretarse como la proporción de variabilidad de los valores de una de las dos variables explicada por los de la otra.

El coeficiente de correlación de Spearman es una variante del coeficiente de correlación de Pearson en la que, en lugar de medir el grado de asociación lineal a partir de los propios valores de las variables, se mide a partir de la asignación de rangos a los valores ordenados (naturales consecutivos de 1 al número total de observaciones). En consecuencia, se aplica cuando cada valor en sí no es tan importante como su situación respecto a los restantes. En este sentido es una medida que también puede ser adecuada en el caso de variables en escala ordinal. Por lo demás, sus valores se interpretan exactamente igual que los del coeficiente de correlación de Pearson.

Siguiendo con el primer ejemplo planteado en este epígrafe (Figura 7.6), los valores de los coeficientes de correlación de Pearson y Spearman son iguales a $-0,70046$ («Pearson's R») y a $-0,72205$ («Spearman Correlation»). Con el coeficiente Eta el objetivo era analizar el comportamiento de la variable dependiente *REAPARIC* en los distintos grupos establecidos por los valores de *RESPUEST*. En

este caso, nuestro objetivo será analizar el grado de asociación lineal entre los valores de las dos variables, sin distinguir a una de ellas como dependiente. Al estar el valor de ambos coeficientes relativamente próximo a -1 , la asociación lineal es fuerte y negativa: a mayor valor en una de las variables menor valor en la otra. Efectivamente, en la tabla de contingencia la frecuencia observada se acumula en las celdas próximas a la diagonal opuesta a la principal. Sin embargo, aunque en los valores altos de *RESPUEST* (6 y 8 semanas) la frecuencia se acumula a ambos lados de dicha diagonal, en los valores bajos (2 y 4 semanas) se acumula a su izquierda. En otras palabras, parece que la frecuencia, más que acumularse linealmente en torno a la diagonal, se acumula formando una curva, razón por la que el valor de estos dos coeficientes no es mayor aún (en valor absoluto). Como conclusión, cuanto mayor es el tiempo de respuesta al tratamiento, menor es el tiempo de reaparición de los síntomas. En concreto, si el tiempo de respuesta al tratamiento es de 2 semanas, la reaparición de la sintomatología ulcerosa estará en torno a los 12 meses; si es de 4 o 6 semanas, estará en torno a los 8 (en el caso de 4 semanas, con tendencia a los 12 meses, mientras que en el caso de 6, con tendencia a los 4) y, por último, si el tiempo de respuesta al tratamiento es de 8 semanas, la reaparición de la sintomatología ulcerosa estará entre 4 y 8 meses.

Recordemos que, tal como sucedía con el coeficiente *Eta*, los coeficientes de correlación de Pearson y Spearman son medidas adecuadas para el caso de que las variables estén medidas en escala de intervalo o de razón, que permiten explicar, mediante su cuadrado, la variabilidad de los valores de una variable a partir de la variabilidad de los valores de la otra. En otras palabras, y en este caso concreto, las expresiones de estos dos coeficientes dependen de las medias y de las desviaciones típicas de los valores de las variables *REAPARIC* y *RESPUEST* (en el caso del coeficiente de correlación de Spearman, de las medias y desviaciones típicas de los rangos asignados), y no de las frecuencias observadas en la tabla (aunque de alguna manera los dos tipos de información estén relacionados). En este sentido, y como extensión del segundo ejemplo considerado con el coeficiente *Eta*, desarrollaremos un ejemplo análogo al actual en el que, a diferencia de éste, el número de posibles valores de las dos variables sea grande.

Hasta ahora, las variables *REAPARIC* y *RESPUEST* únicamente podían tomar valores iguales a 4, 8, 12 y 16 meses, en el caso de la primera, y a 2, 4, 6 y 8 semanas, en el caso de la segunda. Supongamos exactamente la misma situación del ejemplo anterior pero con la diferencia de que, en este caso, los valores de la variable *REAPARIC* son iguales a 1, 2, ... y 16 meses y los de *RESPUEST*, iguales a 1, 2, ... y 8 semanas.

Los coeficientes de correlación de Pearson y Spearman sobre los nuevos valores de las variables *REAPARIC* y *RESPUEST* se solicitan en el Cuadro de diálogo 7.8. Los resultados se disponen en la Figura 7.8. En el caso del primero se proporciona la matriz de correlaciones, por lo que los elementos en la diagonal principal, correspondientes a la correlación entre cada variable y ella misma, son iguales a 1. La correlación de Pearson entre las variables *REAPARIC* y *RESPUEST*, en las celdas ubicadas en la diagonal opuesta a la principal, es igual a $-0,7690$; la correlación

ESTADÍSTICA → CORRELACIONES → BIVARIADAS En el Cuadro de diálogo
 VARIABLES: RESPUEST, REAPARIC
 COEFICIENTES DE CORRELACION: PEARSON, SPEARMAN
 ACEPTAR

CUADRO DE DIALOGO 7.8. Coeficientes de correlación de Pearson y de Spearman para las variables *RESPUEST* y *REAPARIC*.

Correlation Coefficients		
	RESPUEST	REAPARIC
RESPUEST	1,0000 (,312) P= ,	-,7690 (,312) P= ,000
REAPARIC	-,7690 (,312) P= ,000	1,0000 (,312) P= ,
(Coefficient / (Cases) / 2-tailed Significance)		
- - S P E A R M A N C O R R E L A T I O N C O E F F I C I E N T S - -		
REAPARIC	RESPUEST	-,7885 N(,312) Sig ,000
(Coefficient / (Cases) / 2-tailed Significance)		

FIGURA 7.8. Coeficientes de correlación de Pearson y de Spearman para las variables *RESPUEST* y *REAPARIC*.

de Spearman es igual a $-0,7885$. Comparando estos resultados con los obtenidos en el ejemplo anterior (en el que los valores de ambas variables estaban agrupados) se observa que, tanto con una correlación como con la otra, la intensidad de la asociación lineal negativa es mayor cuando los valores no son agrupados.

En el capítulo dedicado al análisis de regresión lineal se desarrollará este último ejemplo, proporcionando un estudio más profundo del significado y aplicación del coeficiente de correlación lineal de Pearson.

La medida de asociación lineal de Mantel-Haenszel

La medida de asociación lineal de Mantel-Haenszel, construida a partir del coeficiente de correlación de Pearson, permite contrastar la hipótesis nula de incorrelación entre los valores de dos variables en escala de intervalo o de razón. Se define como el cuadrado del coeficiente de correlación de Pearson multiplicado por $(N - 1)$, siendo N el número total de observaciones en la muestra. En consecuencia, toma valores entre 0 y $(N - 1)$. Cuanto más se aproxime su valor a $(N - 1)$ mayor será el grado de asociación lineal.

Siguiendo con el primer ejemplo planteado en este epígrafe (Figura 7.6), el valor de la medida de asociación lineal de Mantel-Haenszel es igual a 152,58982 («Mantel-Haenszel test for linear association»). Dado que el total de observaciones en la muestra es igual a 312, el máximo valor que puede alcanzar, en este caso, es 311. Por tanto, para poder interpretar si el valor obtenido es grande o pequeño habría que compararlo con 311. Teniendo en cuenta que el valor obtenido es aproximadamente igual a un medio del máximo valor posible, la asociación lineal entre las variables *REAPARIC* y *RESPUEST* no es demasiado fuerte, aunque tampoco es débil.

Supongamos que se desea analizar el efecto de añadir un fármaco A al tratamiento habitual de pacientes con fracción de eyección del ventrículo izquierdo (FEVI) deprimida en grado severo. Para ello, se seleccionan aleatoriamente 11 de los 23 pacientes a los que se va a aplicar el tratamiento habitual y, para los 11 seleccionados, se añade al tratamiento habitual el fármaco A. Después de seis meses se compara la FEVI en los dos grupos de pacientes. Para comprobar si la FEVI después del tratamiento es la misma independientemente de que se añada o no el fármaco A, las pruebas que se aplicarán son las pruebas no paramétricas de Mann-Whitney, de Kolmogorov-Smirnov y de Wald-Wolfowitz.

Prueba de Mann-Whitney

Supongamos que se dispone de muestras de dos subpoblaciones y que, sobre cada individuo de cada muestra, se mide una variable en escala al menos ordinal X . La prueba de Mann-Whitney se utiliza para contrastar la hipótesis nula de que las muestras proceden de dos subpoblaciones en las que la probabilidad de obtener en la primera un resultado de X menor que en la segunda es igual a la probabilidad de obtener un resultado mayor:

$$H_0: P_{A < B} = P_{A > B}$$

Si el p -valor asociado al estadístico de contraste es menor que α , se rechazará la hipótesis nula al nivel de significación α .